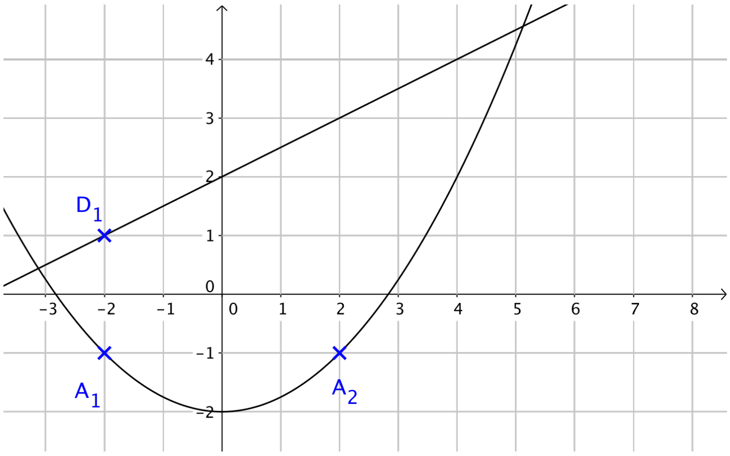
Funktionale Abhängigkeiten

Aufgabe A1

1.0 Die Punkte A_n $(x|0{,}25x^2 - 2)$ auf der Parabel p: $y = 0{,}25x^2 - 2$ und die Punkte $D_n(x|0{,}5x + 2)$ auf der Geraden g: $y = 0{,}5x + 2$ haben dieselbe Abszisse x. Zusammen mit Punkten B_n und C_n sind sie Eckpunkte von Rechtecken $A_nB_nC_nD_n$.
Es gilt: $\overline{A_nB_n} = 1{,}5 \cdot \overline{A_nD_n}$; $x_A < x_B$.

1.1 Zeichnen Sie die Rechtecke $A_1B_1C_1D_1$ für $x = -2$ und $A_2B_2C_2D_2$ für $x = 2$ in nebenstehendes Koordinatensystem ein.

Hinweis: Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.



1.2 Bestätigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecke $[A_nD_n]$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt:
$\overline{A_nD_n} = [-0{,}25x^2 + 0{,}5x + 4]$ LE

1.3 Bestätigen Sie durch Rechnung, dass für den Umfang u der Rechtecke $A_nB_nC_nD_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt:
$u(x) = [-1{,}25x^2 + 2{,}5x + 20]$ LE

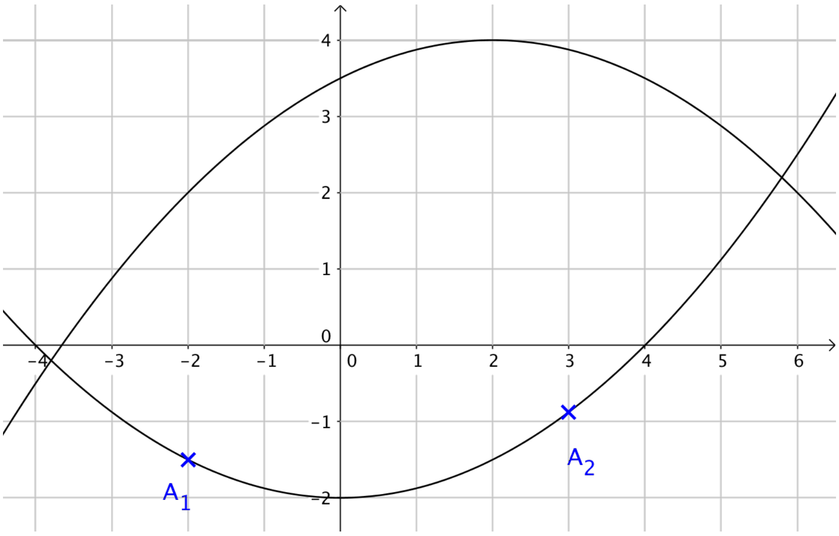
1.4 Unter den Rechtecken $A_nB_nC_nD_n$ besitzt das Rechteck $A_0B_0C_0D_0$ einen maximalen Umfang. Bestimmen Sie den Umfang des Rechtecks $A_0B_0C_0D_0$ und den zugehörigen Wert für x durch quadratisches Ergänzen.

Lösungen

Aufgabe A2

2.0 Die Punkte A_n $(x|0{,}125x^2 - 2)$ auf der Parabel p_1: $y = 0{,}125x^2 - 2$ und die Punkte C_n auf der Parabel p_2: $y = -0{,}125(x-2)^2 + 4$ haben dieselbe Abszisse x. Zusammen mit Punkten B_n und D_n bilden sie die Eckpunkte von Rauten $A_nB_nC_nD_n$.
Es gilt: $\overline{B_nD_n} = 4$ LE.

2.1 Zeichnen Sie die Rauten $A_1B_1C_1D_1$ für $x = -2$ und $A_2B_2C_2D_2$ für $x = 3$ in nebenstehendes Koordinatensystem ein.



2.2 Geben Sie die allgemeine Form der Parabel p_2 sowie deren Wertemenge und Symmetrieachse an.

2.3 Bestätigen Sie durch Rechnung, dass für den Flächeninhalt A der Rauten $A_nB_nC_nD_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt:
$A(x) = [-0{,}5x^2 + x + 11]$ FE

2.4 Die Punkte M_n sind die Schnittpunkte der Diagonalen $[A_nC_n]$ und $[B_nD_n]$ der Rauten $A_nB_nC_nD_n$. Ermitteln Sie die y-Koordinaten der Punkte M_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n.

Lösungen

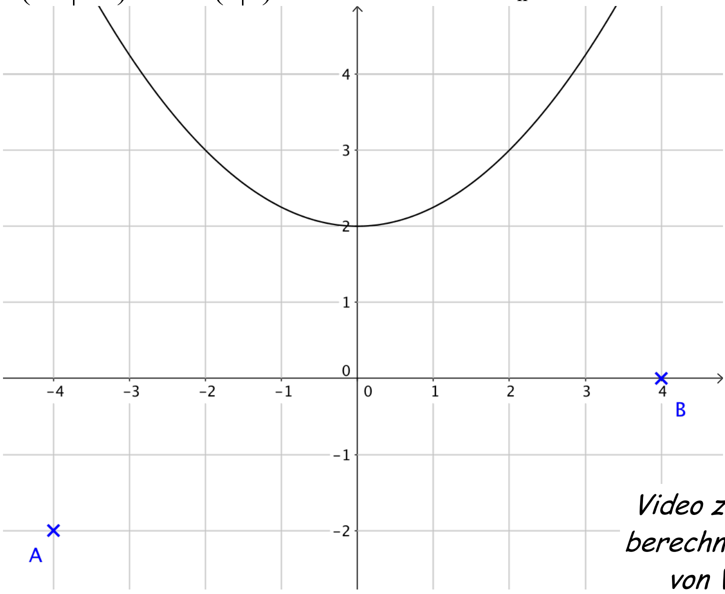
Zusatz:
Bestimmen Sie durch Rechnung die Koordinaten der Schnittpunkte S und R der Parabeln p_1 und p_2.

Zusatz:
Unter den Rauten $A_nB_nC_nD_n$ besitzt die Raute $A_0B_0C_0D_0$ einen extremalen Flächeninhalt. Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Raute $A_0B_0C_0D_0$ und den zugehörigen Wert für x mithilfe der Formel.

Aufgabe A3

3.0 Die Punkte C_n liegen auf der Parabel p mit der Gleichung p: $y = 0{,}25x^2 + 2$ und bilden zusammen mit den Punkten $A(-4|-2)$ und $B(4|0)$ die Dreiecke ABC_n.

3.1 Zeichnen Sie die Dreiecke ABC_1 für $x = -3$ und ABC_2 für $x = 2$ in nebenstehendes Koordinatensystem ein.



3.2 Bestätigen Sie, dass für den Vektor $\overrightarrow{AC_n}$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte C_n gilt:

$$\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} x + 4 \\ 0{,}25x^2 + 4 \end{pmatrix}$$

Video zur Flächenberechnung mithilfe von Vektoren

3.3 Bestätigen Sie durch Rechnung, dass für den Flächeninhalt A in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte C_n gilt:
$A(x) = [x^2 - x + 12]$ FE

3.4 Weisen Sie durch Rechnung nach, dass unter den Dreiecken ABC_n keines mit einem Flächeninhalt von 10 FE existiert.

Lösungen

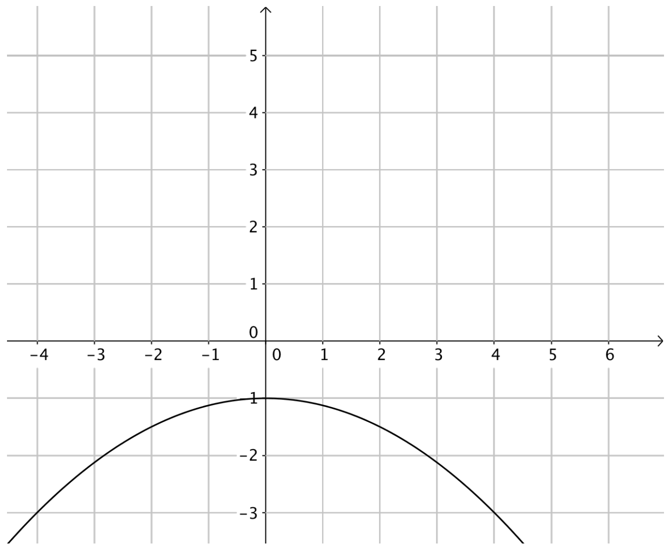
Zusatz:
Unter den Dreiecken ABC_n besitzt das Dreieck ABC_0 den minimalen Flächeninhalt. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC_0 und den zugehörigen Wert für x durch quadratisches Ergänzen.

Aufgabe A4

4.0 Die Punkte A_n liegen auf der Parabel p mit der Gleichung p: $y = -0{,}125x^2 - 1$ und bilden zusammen mit den Punkten B(4|0), C_n und D(– 2|2) Parallelogramme A_nBC_nD.

4.1 Zeichnen Sie die Parallelogramme A_1BC_1D für x = – 4 und A_2BC_2D für x = 0 in das Koordinatensystem ein.

Hinweis: Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.



4.2 Bestätigen Sie durch Rechnung, dass für den Flächeninhalt A der Parallelogramme A_nBC_nD in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt:
$A(x) = [0{,}75x^2 - 2x + 14]$ FE

4.3 Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms A_1BC_1D für x = – 4.

4.4 Unter den Parallelogrammen A_nBC_nD besitzt das Parallelogramm A_0BC_0D einen extremalen Flächeninhalt. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms A_0BC_0D und den zugehörigen Wert für x durch quadratisches Ergänzen.

Lösungen

Zusatz:
Unter den Parallelogrammen A_nBC_nD existieren zwei Parallelogramme mit einem Flächeninhalt von 18 FE. Berechnen Sie die jeweilige Abszisse x der Punkte A_3 und A_4.